SIMULASI DAN PEMODELAN
BAB I PENDAHULUAN

Oleh : Asep Juarna, SSi, MKom

Contoh Kasus : Pendirian sebuah apotik

A. Data :

1. Jam buka : 09.00 - 17.00 setiap hari kerja (tidak ada resep yang akan diterima sesudah jam 17.00, walaupun apoteker akan tetap berada di apotik untuk mengerjakan resep)
2. Harapan : ada 32 resep masuk setiap hari sebelum jam 17.00
3. Data waktu pelayanan sebuah resep : (10 ± 4) menit. (Waktu pelayanan adalah waktu penyelesaian sebuah resep sejak resep itu masuk, termasuk waktu antri karena ada resep lain yang lebih dahulu masuk)

B. Pertanyaan yang ingin dijawab :

1. Rata-rata pukul berapa akan meninggalkan apotik setiap hari ?
2. Berapa proporsi hari dimana ia akan tetap berada di apotik pada pukul 17.30 ?
3. Berapa waktu pelayanan rata-rata sebuah resep ?
4. Berapa proporsi waktu pelayanan 30 menit atau kurang ?

C. Perubahan kebijaksanaan :

Sebuah resep hanya akan diterima jika terdapat kurang dari lima resep yang harus diterima.

1. Berapa rata-rata jumlah resep yang akan lolos ?
2. Bagimana perubahan jawaban atas pertanyaan B1 s/d B4 ?

D. Asumsi :

Pertanyaan-pertanyaan di atas memerlukan sebuah asumsi tentang fungsi distribusi probabilitas, terutama fungsi distribusi probabilitas dari 32 pengunjung yang diharapkan tersebut. Selain itu perlu ditetapkan apakah fungsi tersebut konstan atau bergantung waktu ? Tegasnya, apakah perbedaan hari dalam satu minggu atau perbedaan jam pada suatu hari atau kombinasi keduanya akan mempengaruhi bentuk fungsi distribusi ? Selanjutnya perlu ditetapkan juga sebuah asumsi : apakah jumlah resep yang sudah datang akan mempengaruhi waktu penyelesaian sebuah resep ? Kalau ya, bagaimana pengaruhnya ?

E. Simulasi :

Segera setelah asumsi ditetapkan maka fungsi distribusi probabilitas dapat disusun. Selanjutnya jawaban atas pertanyaan di atas (bagian B dan C) dapat diperoleh melaui sebuah studi simulasi. Studi simulasi adalah pemrograman mekanisme probabilistik pada komputer dengan menggunakan bilangan acak sebagai wakil dari kejadian acak, atau dengan kata lain komputer membangkitkan sebuah bilangan acak untuk ditetapkan sebagai nilai dari sebuah variabel acak. Dua contoh variabel acak dalam kasus apotik ini adalah waktu pelayanan resep dan jam pulang apoteker. Berasarkan nilai-nilai variabel acak tersebut, teori statistik kemudian digunakan untuk mengestimasi nilai harapan (atau nilai rata-rata) variabel acak.

SIMULASI DAN PEMODELAN
BAB II ELEMEN PROBABILITAS

Oleh : Asep Juarna, SSi, MKom

2.1. Ruang Sampel dan Peristiwa (*kejadian, event*)

Definisi :

- <u>Ruang sampel</u> S adalah himpunan hasil yang mungkin dicapai.

<u>Contoh 1 :</u>

S = {semua urutan 7 bilangan pertama : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

S = {semua pasangan angka dadu pada pelemparan dua dadu}

- <u>Peristiwa</u> A adalah himpunan hasil yang mungkin diperoleh dalam sebuah percobaan, atau dengan kata lain peristiwa A adalah himpunan bagian dari ruang sampel.

<u>Contoh 2 :</u>

A = {semua urutan 7 bilangan pertama yang dimulai dengan 5}

B = {semua pasangan angka dadu yang berjumlah 8 pada pelemparan dadu}

- Jika A dan B adalah dua peristiwa maka : $A \cup B$ disebut <u>gabungan</u> <u>(union)</u> kedua peristiwa, yaitu himpunan semua hasil yang terdapat di dalam peristiwa A atau B.

<u>Contoh 3 :</u>

A = {semua pasangan angka dadu yang berjumlah 10 pada pelemparan dua dadu} = {(5,5), (6,4), (4,6)}

B = {semua pasangan angka dadu yang berjumlah 11 pada pelemparan dua dadu} = {(6,5), (5,6)}

$A \cup B$ = {(5,5), (6,4), (4,6), (6,5), (5,6)}

Gabungan dapat diperluas untuk n buah peristiwa : $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$

- Jika A dan B adalah dua peristiwa maka : $A \cap B = AB$ disebut <u>irisan</u> <u>(intersection)</u> kedua peristiwa, yaitu himpunan semua hasil yang terdapat di dalam peristiwa A sekaligus di dalam peristiwa B.

Contoh 4 :

A = {semua pasangan angka dadu yang berjumlah 10 atau lebih pada pelemparan dua dadu} = {(5,5), (6,4), (4,6), (6,5), (5,6), (6,6)}

B = {semua pasangan angka dadu yang berjumlah 11 atau lebih pada pelemparan dua dadu} = {(6,5), (5,6), (6,6)}

$A \cap B$ = {(6,5), (5,6), (6,6)}

Irisan dapat diperluas untuk n buah peristiwa : $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 A_2 \cdots A_n$

- A dan B dikatakan bersifat mutually exclusive jika $AB = \varnothing$
- Komplemen peristiwa A, dinotasikan sebagai A^c, adalah semua hasil yang terdapat di dalam ruang sampel S yang tidak terdapat di dalam A. Jelaslah peristiwa A^c hanya terjadi jika peristiwa A tidak terjadi.

2.2. Aksioma Probabilitas

Untuk setiap peristiwa A dalam ruang sampel S terdapat sebuah bilangan P(A) yang disebut probabilitas terjadinya peristiwa A. Secara umum probabilitas peristiwa A atas ruang sampel S dinyatakan sebagai :

$$P(A) = \frac{\text{Banyaknya hasil yang mungkin dalam peristiwa A}}{\text{Banyaknya hasil yang mungkin dalam ruang sampel S}} \quad (2.1)$$

Contoh 5 :

S = {semua pasangan angka dadu pada pelemparan dua dadu}
= {(1,1), (1,2), ... ,(1,6), (2,1), ..., (2,6), ..., (6,6)}
= 36 nilai yang mungkin

A = {semua pasangan angka dadu yang berjumlah 10 pada pelemparan dua dadu}
= {(5,5), (6,4), (4,6)} = 3 nilai yang mungkin

$P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

Terdapat tiga aksioma probabilitas.

Aksioma 1 : $0 \le P(A) \le 1$

Aksioma 2 : $P(S) = 1$

Aksioma 3 : Untuk semua peristiwa A_i yang bersifat mutually exclusive berlaku :

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i);\ n = 1, 2, 3, \ldots, \infty$$

Beberapa aturan tambahan :

- Jika A dan B adalah dua sembarang peristiwa maka : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
- Peristiwa A dan A^c bersifat mutually ecxlusive, selain itu $A \cup A^c = S$

  Jelaslah bahwa $P(S) = 1 = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$, atau

  $P(A) = 1 - P(A^c)$
- Probabilitas bersyarat peristiwa A jika peristiwa B telah terjadi adalah probabilitas kejadian peristiwa A pada ruang sampel yang mengandung peristiwa B. Probabilitas bersyarat ini dinotasikan sebagai $P(A \mid B)$ dan secara matematis didefinisikan sebagai :

  $$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \qquad (2.2)$$

Formula probabilitas bersyarat dapat digunakan untuk menghitung $P(AB)$, yaitu :

$$P(AB) = P(B)\, P(A \mid B) \qquad (2.3)$$

Formula (2.3) juga digunakan untuk dua percobaan dengan sampel tanpa pemulihan.

Jika $P(A \mid B) = P(A)$ maka dikatakan dikatakan bahwa peristiwa A tidak bergantung kepada (independen) peristiwa B; dalam kasus ini maka :

$$P(AB) = P(A)\, P(B) \qquad (2.4)$$

Formula (2.3) juga digunakan untuk dua percobaan dengan sampel dengan pemulihan.

Contoh 6 :

Di dalam sebuah kotak terdapat 25 buah spare part, 10 diantaranya rusak. Dua buah spare part diambil secara acak dari kotak tersebut. Hitunglah :

a. Probabilitas kedua spare part baik

b. Probabilitas kedua spare part rusak

c. Probabilitas satu spare part baik dan satu lagi rusak

Jawab :

a. Misalkan A adalah peristiwa "spare part pertama yang diambil adalah baik" dan B adalah peristiwa "spare part kedua yang diambil adalah baik", dengan demikian AB adalah peristiwa "kedua barang yang diambil adalah baik).

b. $P(AB) = P(A)\ P(B \mid A) = \frac{15}{25} \times \frac{14}{24} = \frac{7}{20}$. Dengan penjelasan yang sama, probabilitas kedua spare part yang diambil rusak adalah $\frac{10}{25} \times \frac{9}{24} = \frac{3}{20}$

c. Misalkan

X = peristiwa "kedua spare part yang diambil adalah baik",

Y = peristiwa "kedua spare part yang diambil adalah rusak",

Z = peristiwa "satu spare part yang diambil adalah baik, satu lagi rusak"

Dalam pengambilan dua spsre part secara acak seperti di atas, tidak ada kemungkinan lain selain dari ketiga peristiwa tersebut, karena itu : $P(X \cup Y \cup Z) = 1$

Ketiga peristiwa bersifat saling mutually exclusive sehingga :

$$P(X \cup Y \cup Z) = P(X) + P(Y) + P(Z), \text{ atau}$$

$$P(Z) = 1 - P(X) - P(Y) = 1 - \frac{7}{20} - \frac{3}{20} = \frac{1}{2}$$

Cara lain menghitung probabilitas peristiwa "satu spare part yang diambil adalah baik, satu lagi rusak" adalah sebagai berikut :

Misalkan

G = peristiwa "spare part pertama yang diambil baik, yang kedua rusak"

H = peristiwa "spare part pertama yang diambil rusak, yang kedua baik"

Karena peristiwa G dan H bersifat mutually exclusive, maka :

$P(G + H) = P(G) + P(H) = \frac{15}{25} \times \frac{10}{24} + \frac{10}{25} \times \frac{15}{24} = \frac{300}{600} = \frac{1}{2}$

2.3. Variabel Acak

- Misalkan X adalah jumlah dua mata dadu pada percobaan pelemparan dadu. X jelas akan bernilai 2, 3, ..., 12, tetapi kita tidak dapat memperkirakan berapa nilai X pada percobaan yang belum dilakukan.
- X adalah <u>variabel acak</u>, yaitu fungsi bernilai real yang nilainya bergantung kepada peluang. Ruang definisi fungsi X adalah ruang sampel S.
- $P(X = a)$ = probabilitas peristiwa $X = a$ (X mengambil nilai a)

  $P(a < X < b)$ = probabilitas peristiwa $a < X < b$

  $P(X \leq c)$ = probabilitas peristiwa $X \leq c$

  $P(X > c)$ = probabilitas peristiwa $X > c$
- Peristiwa $X \leq c$ dan $X > c$ bersifat mutually exclusive sehingga:

  $P(X \leq c) + P(X > c) = P(-\infty < X < \infty) = 1$, atau :

  $P(X > c) = 1 - P(X \leq c)$ (2.5)
- Jika $\{x_i\}$ adalah himpunan nilai yang mungkin <u>bagi variabel acak diskrit</u> X dengan probabilitas masing-masing p_i, maka <u>fungsi probabilitas</u> f(x) didefinisikan sebagai :

$$f(x) = \begin{cases} p_i & \text{jika } x = x_i \ (i = 1, 2, ...) \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$$

Karena P(S) = 1, maka : $\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) = 1$ (2.6)

Khususnya : $P(a < X \leq b) = \sum_{a < x_i \leq b} f(x_i) = \sum_{a < x_i \leq b} p_i$ (2.7)

Jelaslah bahwa fungsi probabilitas akan menentukan distribusi probabilitas.

- <u>Fungsi distribusi</u> $F(x)$ didefinisikan sebagai : $F(x) = P(X \le x)$
  Untuk $b > a$ kita dapatkan :
  $P(a < X \le b) = P(X \le b) - P(X \le a) = F(b) - F(a)$ (2.8)
  Fungsi distribusi dapat dinyatakan dalam fungsi probabilitas sebagai : $F(x) = \sum_{x_i \le x} f(x_i)$ (2.9)

- Untuk <u>variabel acak kontinu</u> X, fungsi distribusi dinyatakan sebagai :

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(v)\,dv \qquad (2.10)$$

$f(v)$ dinamakan <u>kerapatan probabilitas</u>

Integrasi persamaan integral di atas menghasilkan $F'(x) = f(x)$

Karena $P(S) = 1$, maka : $P(S) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\,dv = 1$

Begitu juga : $P(a < X \le b) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(v)\,dv$ (2.11)

2.4. Harapan (Rata-Rata Tertimbang)

- Diskrit : $E[X] = \sum_i x_i\, P\{X = x_i\} = \sum_i x_i\, f(x_i)$ (2.12)

<u>Contoh 7:</u>

Jika : $p(0) = \frac{1}{2} = p(1)$,

maka $E[X] = 0 \times p(0) + 1 \times p(1) = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

- Kontinu : $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\,dx$ (2.13)

<u>Contoh 8 :</u>

Jika : $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{jika } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$, maka $E[X] = \int_0^1 3\,x^3\,dx = \frac{3}{4}$

- Harapan dari fungsi variabel acak diskrit $g(X)$ dengan fungsi massa probabilitas $p(x)$ adalah : $E[g(X)] = \sum_x g(x)\, p(x)$ (2.14)
- Harapan dari fungsi variabel acak kontinu $g(X)$ dengan fungsi densitas probabilitas $f(x)$ adalah : $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f(x)\, dx$ (2.15)
- Harapan adalah operasi yang bersifat linier.

<u>Contoh 9 :</u>

$E[aX+b] = \sum_x (ax+b)\, p(x) = a\sum_x x\, p(x) + b\sum_x p(x) = aE[X] + b$

Buktikan : $E[X_1+X_2] = E[X_1]+E[X_2]$

2.5. Variansi

- Jika X adalah variabel acak dengan rerata μ, maka variansi X adalah : $Var(X) = E[(X-\mu)^2]$, atau : $Var(X) = E[X^2]-(E[X])^2$

$$Var(X) = E[(X-\mu)^2] = E[X^2-2\mu X + \mu^2]$$
$$= E[X^2] - E[2\mu X] + E[\mu^2] = E[X^2] - 2\mu E[X] + \mu^2$$
$$= E[X^2]-\mu^2 = E[X^2]-(E[X])^2 \quad (2.16)$$

- **Buktikan :** $Var(aX+b) = a^2\, Var(X)$

2.6. Beberapa Variabel Acak Diskrit

Soal Pendahuluan :

Serangkaian percobaan dilakukan. Pada setiap percobaan salah satu peristiwa E_1 atau E_2 terjadi. Probabilitas peristiwa E_1 adalah p. Hasil setiap percobaan tidak bergantung kepada percobaan sebelumnya. Tentukan probabilitas bahwa n percobaan tepat menghasilkan k peristiwa E_1.

Solusi :

Jika k negatif atau lebih besar dari n maka probabilitas di atas adalah nol. Misalkan n = 0, 1, 2, ..., n. Akan dihitung probabilitas peristiwa $A = k$ percobaan pertama menghasilkan E_1 dan $n - k$ percobaan sisanya menghasilkan E_2. Perhatikan persmaan (2.3) dan (2.4). Karena peristiwa E_1 dan E_2 bersifat independen maka probabilitas peristiwa A adalah : $p^k(1-p)^{n-k}$. Kombinasi k peristiwa E_1 atas n percobaan adalah : $C_{n,k}=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Dengan demikian probabilitas bahwa n percobaan tepat menghasilkan k peristiwa E_1 adalah :

$$P(k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=C_{n,k}\,p^k(1-p)^{n-k} \qquad (2.17)$$

Formula (2.17) adalah probabilitas pada distribusi binomial. Koefisien $\binom{n}{k}$ dikenal sebagai koefisien binomial. Rerata dan variansi distribusi binomial masing-masing adalah :

$\mu = np$, $\quad Var(X) = np(1-p)$

Berikut ini ciri-ciri beberapa variabel acak diskrit.

Distribusi	Selang X	Fungsi	Rerata	Variansi
Binomial	0, 1, 2, …, n	$C_{n,k}\,p^k(1-p)^{n-k}$	np	np(1-p)
Poisson	0, 1, 2, …, ∞	$\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	λ	λ
Uniform	0, 1, 2, …, n	$\frac{1}{n+1}$	$\frac{n}{2}$	$\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}$
Geometri	0, 1, 2, …, ∞	$p^k(1-p)$	$\frac{p}{1-p}$	$\frac{1}{(1-p)^2}$

2.6. Beberapa Variabel Acak Diskrit

2.6.1. Fungsi Pembangkit Momen

Fungsi pembangkit momen M(t) didefinisikan sebagi :

$$M(t) = E(t^x) \tag{2.29}$$

Untuk variabel diskrit :

$$M(t) = \sum_x e^{tx} f(x)dx \tag{2.30}$$

dan untuk variabel kontinu :

$$M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\, dx \tag{2.31}$$

dengan sifat-sifat berikut (sebagai ilustrasi untuk kasus diskrit) :

$$\left.\frac{dM}{dt}\right|_{t=0} = M'(0) = \sum_x xe^{tx} f(x)\bigg|_{t=0} = \sum_x x\, f(x) = E(X) = \mu \tag{2.32}$$

$$\left.\frac{d^2M}{dt^2}\right|_{t=0} = M''(0) = E(X^2) \tag{2.33}$$

sehingga :

$$\sigma^2 = Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = M''(0) - \mu^2 \tag{2.34}$$

2.6.2. Variabel Acak Binomial

Soal Pendahuluan :

Serangkaian percobaan dilakukan. Pada setiap percobaan salah satu peristiwa E_1 atau E_2 terjadi. Probabilitas peristiwa E_1 adalah p. Hasil setiap percobaan tidak bergantung kepada percobaan sebelumnya. Tentukan probabilitas bahwa n percobaan tepat menghasilkan k peristiwa E_1.

Solusi :

Jika k negatif atau lebih besar dari n maka probabilitas di atas adalah nol. Misalkan n = 0, 1, 2, …, n. Akan dihitung probabilitas peristiwa A = "k percobaan pertama menghasilkan E_1 dan n − k percobaan sisanya menghasilkan E_2". Perhatikan persamaan (2.3) dan (2.4). Karena peristiwa E_1 dan E_2 bersifat independen maka probabilitas peristiwa A adalah : $p^k(1-p)^{n-k}$. Kombinasi k peristiwa E_1 atas n percobaan adalah : $C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Dengan demikian probabilitas bahwa n percobaan tepat menghasilkan k peristiwa E_1 adalah :

$$f(k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} = C_{n,k}\, p^k(1-p)^{n-k} \qquad (2.35)$$

Formula (2.35) adalah fungsi probabilitas <u>distribusi binomial</u> atau <u>distribusi Bernoulli</u>. Variabel acak diskrit binomial X menyatakan cacahan kejadian peristiwa A dalam n percobaan dimana probabilitas sebuah kejadian A adalah P(A) = p. Koefisien $\binom{n}{k}$ dikenal sebagai koefisien binomial. Koefisien ini muncul dalam ekspansi binomial berikut :

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{n}y^n \qquad (2.36)$$

Nilai ekspektasi dan variansi distribusi binomial dapat dihitung dengan menggunakan fungsi pembangkit momen sebagai berikut :

$$M(t) = \sum_x e^{tx} f(x)dx = \sum_x e^{tx} C_{n,x}\, p^x(1-p)^{n-x} \qquad (2.37)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} C_{n,x}(pe^t)^x(1-p)^{n-x}$$

$$= C_{n,0}\,(1-p)^n + C_{n,1}(pe^t)(1-p)^{n-1} + C_{n,2}\,(pe^t)^2\,(1-p)^{n-2}$$

$$+ \ldots + C_{n,n}\,(pe^t)^n = [(1-p) + pe^t]^n \qquad (2.38)$$

$$M'(t) = n[(1-p) + pe^t]^{n-1}(pe^t)$$

$$M''(t) = n[(1-p) + pe^t]^{n-1}(pe^t) + n(n-1)[(1-p) + pe^t]^{n-2}(pe^t)^2$$

Dengan demikian :

$$\mu = M'(0) = n[(1-p) + p]^{n-1}(p) = n(1)^{n-1}(p) = np \qquad (2.39)$$

$$\sigma^2 = M''(0) - \mu^2$$

$$= n[(1-p) + p]^{n-1}(p) + n(n-1)[(1-p) + p]^{n-2}(p)^2 - n^2p^2$$

$$= np + n(n-1)p^2 - n^2p^2 = np - np^2 = np(1-p) \qquad (2.40)$$

Cara lain menghitung nilai ekspektasi μ dan variansi $Var(X)$ adalah dengan pemikiran sebagai berikut. Variabel acak X binomial (n,p) merupakan jumlah keberhasilan n percobaan individual (variabel acak X_i binomial (1,p)) independen, dengan probabilitas masing-masing p, sehingga :

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \tag{2.41}$$

dimana :

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{jika percobaan ke-i berhasil} \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases} \tag{2.42}$$

sehingga :

$$\mu_i = E(X_i) = P(X_i = 1) = p$$

$$\sigma_i^2 = Var(X_i) = E(X_i^2) - [E(X_i)]^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

Berdasarkan hubungan (2.41), untuk variabel acak X berlaku :

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = np \tag{2.43}$$

$$\sigma^2 = Var(X) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = np(1-p) \tag{2.44}$$

2.6.3. Variabel Acak Poisson

Dalam selang waktu T sejumlah peristiwa dapat terjadi secara independen. Probabilitas sebuah peristiwa terjadi pada selang waktu $\Delta t << T$ sebanding dengan Δt, yaitu $c\Delta t/T$, dimana c konstan sepanjang T. Diasumsikan probabilitas dua atau lebih peristiwa terjadi pada selang waktu Δt sangat kecil sehingga dapat diabaikan. Dapat dibuktikan bahwa probabilitas x buah peristiwa terjadi sebelum waktu t adalah :

$$f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad \lambda = \frac{c\,\Delta t}{T} \tag{2.45}$$

Buktikan : Melalui narasi di atas, terutama asumsi yang digaris bawahi, turunkan persamaan persamaan (2.45).

Fungsi distribusi Poisson (2.45) adalah limit dari fungsi distribusi binomial (2.35), yaitu n besar tetapi np cukup kecil ($np < 5$). Perhatikan bahwa persamaan (2.35) dapat dituliskan sebagai :

$$f(x) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-x+1)\,\frac{p^x (1-p)^{n-x}}{x!} \qquad (2.46)$$

Jika $\lambda = np$ (atau $p = \lambda/n$), maka persamaan (2.46) menjadi :

$$f(x) = \frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}\ldots\frac{n-x+1}{n}\,\frac{\lambda^x (1-\lambda/n)^n (1-\lambda/n)^{-x}}{x!} \qquad (2.47)$$

untuk n besar dan λ kecil maka suku-suku : $\frac{n}{n-1}, \frac{n}{n-2}, \ldots, \frac{n-x+1}{n}$, dan $(1-\lambda/n)^{-x}$ akan mendekati satu sedangkan suku $(1-\lambda/n)^n$ dapat didekati dengan $e^{-\lambda}$ sehingga persamaan (2.47) akan menjadi persamaan (2.45). Dapat ditunjukkan bahwa nilai ekspektasi dan variansi distribusi Poisson adalah :

$$\mu = Var(X) = \lambda,\ \sigma^2 = Var(X) = \lambda \qquad (2.48)$$

Buktikan : Dengan menggunakan fungsi pembangkit momen, buktikan persamaan (2.48).

2.6.4. Variabel Acak Hipergeometri

Distribusi binomial penting dalam sampling tanpa pemulihan. Misalnya di dalam sebuah kotak terdapat N buah bola, M buah bola diantaranya rusak. Jika kita mengambil sebuah bola secara acak maka probabilitas untuk mendapatkan sebuah bola rusak adalah $p = M/N$. Probabilitas mendapatkan x buah bola rusak dalam n kali pengambilan tanpa pemulihan sampel adalah :

$$f(x) = C_{n,x}\left(\frac{M}{N}\right)^x\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-x} \qquad (2.49)$$

Jika n kali pengambilan tersebut dilakukan dengan pemulihan maka probabilitas mendapatkan x buah bola rusak adalah :

$$f(x) = \frac{C_{M,x}\,C_{N-M,n-x}}{C_{N,n}} = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad (2.50)$$

Distribusi dengan fungsi probabilitas (2.50) dinamakan distribusi hipergeometrik. Dapat dibuktikan bahwa nilai ekspektasi dan variansi distribusi hipergeometrik adalah :

$$\mu = n\left(\frac{M}{N}\right), \qquad \sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2\,(N-1)} \qquad (2.51)$$

Buktikan : Dengan menggunakan fungsi pembangkit momen, buktikan persamaan (2.51).

Berikut ini ringkasan ciri-ciri beberapa variabel acak diskrit.

Distribusi	Fungsi Probabilitas	Nilai Ekspektasi	Variansi
Binomial	$C_{n,k}\, p^k (1-p)^{n-k}$	np	np(1-p)
Poisson	$\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	λ	λ
Hipergeometri	$\frac{C_{M,x}\,C_{N-M,n-x}}{C_{N,n}}$	$n\left(\frac{M}{N}\right)$	$\frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$
Uniform	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{(a+b)}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Geometri	$p^k(1-p)$	$\frac{p}{1-p}$	$\frac{1}{(1-p)^2}$

2.7. Beberapa Variabel Acak Kontinu

2.7.1. Variabel Acak Normal

Distribusi normal (disebut juga distribusi gauss) mempunyai fungsi kerapatan yang berbentuk :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \qquad -\infty < x < \infty \qquad (2.52)$$

Distribusi normal dengan fungsi kerapatan di atas mempunyai nilai ekspektasi μ dan variansi σ^2 (atau standar deviasi σ). Bentuk kurva f(x) adalah lonceng simetris tertutup dengan tinggi puncak $f(x=\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ sehingga fungsi ini dikenal sebagai *bell function.*

Kurus gemuknya bell function ini bergantung kepada nilai σ. Makin besar nilai σ makin gemuklah *bell function* tersebut. Fungsi distribusi yang terkait dengan fungsi kerapatan di atas dinyatakan sebagai :

$$F(x) = P(X \le x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-(v-\mu)^2/2\sigma^2} dv \qquad (2.53)$$

Seringkali fungsi kerapatan di atas dibakukan (*standarized*) dengan transformasi variabel $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ sehingga fungsi kerapatan menjadi :

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \qquad (2.54)$$

Distribusi normal dengan fungsi kerapatan f(z) mempunyai nilai ekspektasi 0 dan variansi 1 dan $\int_{-\infty}^{\infty} f(v)dv = 1$. Tabel distribusi normal yang biasa digunakan adalah tabel nilai $\int_{0}^{z} f(v)dv$.

Contoh 14 :

Hitunglah luas di bawah kurva :

(a) antara z = 0 dan z = 1.2

(b) antara z = -0.68 dan z = 0

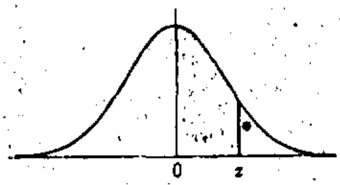
(c) antara z = -0.46 dan z = 2.21

(d) antara z = 0.81 dan 1.94

(e) antara z = -1.28 dan ∞

Appendix C

Areas under the Standard Normal Curve from 0 to *z*



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0754
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2518	.2549
0.7	.2580	.2612	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2996	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997
3.4	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4998
3.5	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998
3.6	.4998	.4998	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.7	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.8	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.9	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000

Jawab :

(a) Lihat tabel. Telusuri kolom z sampai ditemukan angka 1.2, lalu telusuri ke kanan sampai kolom 0. Akan ditemukan angka 0.3849. Angka ini menyatakan probabilitas nilai variabel acak Z terletak antara 0 dan 1.2, atau $P(0 \le z \le 1.2) = 0.3849$.

(b) Luas antara -0.68 dan 0 sama dengan luas antara 0 dan 0.68, karena bentuk fungsi f(z) simetris. Jadi, telusuri kolom z sampai ditemukan angka 0.6, lalu telusuri ke kanan sampai kolom 8. Akan ditemukan angka 0.2517. Jadi $P(-0.68 \le z \le 0) = 0.2517$.

(c) $P(-0.46 \le z \le 2.21) = P(-0.46 \le z \le 0) + P(0 \le z \le 2.21)$
$= P(0 \le z \le 0.46) + P(0 \le z \le 2.21)$
$= 0.1772 + 0.4864 = 0.6636$

(d) $P(0.81 \le z \le 1.94) = P(\ 1.94 \le z \le 0) - P(0 \le z \le 0.81)$
$= 0.4738 - 0.2910 = 0.1828$

(e) $P(-0.28 \le z \le \infty) = P(0 \le z \le 0.28) + P(0 \le z \le \infty)$
$= 0.3997 + 0.5 = 0.8997$

Contoh 15 :

Bobot rata-rata 500 mahasiswa di sebuah perguruan tinggi adalah 75 kg dengan standar deviasi 7 kg. Asumsikan bahwa nilai bobot tersebut mengikuti distribusi normal. Tentukan :

(a) banyaknya mahasiswa dengan bobot antara 60 kg dan 78 kg

(b) banyaknya mahasiswa dengan bobot lebih dari 92 kg

Jawab :

Berat adalah variabel X sedangkan variabel dalam tabel adalah Z. Agar solusi dapat diperoleh dari tabel, perlu transformasi X ke Z melaui formula : $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$.

(a) Bobot tercatat antara 60 kg dan 78 kg sebenarnya bisa saja dari 59.5 kg s/d 78.5 kg (atau tidak begitu). Transformasi kedua nilai X ini ke dalam nilai Z menghasilkan :

59.5 kg → (59.5 – 75) / 7 = -2.21
78.5 kg → (78.5 – 75) / 7 = 0.50
Proporsi mahasiswa yang diinginkan adalah :

$$P(-2.21 \le z \le 0.50) = P(-2.21 \le z \le 0) + P(0 \le z \le 0.50)$$
$$= P(0 \le z \le 2.21) + P(0 \le z \le 0.50)$$
$$= 0.4864 + 0.1915 = 0.6779$$

Banyaknya mahasiswa dengan bobot antara 60 kg dan 78 kg adalah : 0.6779 × 500 = 339.

(b) Banyaknya mahasiswa dengan bobot lebih dari 92 kg adalah 3 orang. (Buktikan).

Latihan 2.5.
Buktikan jawaban Contoh 15 b di atas.

2.7.2. Ringkasan Beberapa Variabel Acak Kontinu

Berikut ini ringkasan ciri-ciri beberapa variabel acak kontinu.

Distribusi	Fungsi Kerapatan	Nilai Ekspektasi	Variansi
Normal	$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$	0	1
Rectangular	$f(x) = \frac{1}{a}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{a^2}{12}$
Eksponensial	$f(x) = ae^{-ax}$	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a^2}$
Gamma	$f(x) = \frac{b^{a+1}}{\Gamma(a+1)} x^a e^{-bx}$	$\frac{a+1}{b}$	$\frac{a+1}{b^2}$

Latihan 2.6.
Buktikan nilai ekspektasi dan variansi keempat distribusi di atas dengan menggunakan fungsi pembangkit momen.

SIMULASI DAN PEMODELAN
BAB III BILANGAN ACAK

Oleh : Asep Juarna, SSi, MKom

3.1. Pendahuluan

Dasar pengembangan studi simulasi adalah kemampuan untuk menghasilkan bilangan acak. Bilangan acak tersebut akan mewakili suatu variabel acak dengan distribusi tertentu pada selang niali (0,1).

3.2. Pembangkitan Bilangan Acak Semu

Pada awalnya bilangan acak dibangkitkan dengan cara melempar koin, melempar dadu, atau mengocok kartu Bilangan yang dibangkitkan dengan cara ini benar-benar merupakan bilangan acak. Kini bilangan acak umumnya dibangkitkan melalui program komputer dan bilangan yang dihasilkannya adalah bilangan acak semu. Walupun demikian kita akan menyebut bilangan acak semu sebagai bilangan acak saja. Formula rekursif pembangkit bilangan acak yang paling primitif adalah :

$$x_n = a\, x_{n-1} \bmod m \qquad (3.1)$$

Pada formula di atas a dan m adalah bilangan bulat positif, sedangkan x_0 dikenal sebagai benih. Jelas bahwa nilai x_n adalah : $x_n = 0, 1, 2, \ldots, m-1$. Jika nilai-nilai x_n ini dibagi dengan m maka akan diperoleh bilangan acak yang terdistribusi pada selang (0,1). Pembangkitan bilangan acak semu dengan menggunakan formula (3.1) disebut metoda kongruen multiplikatif.

Contoh 3.1.

Diberikan $x_0 = 2$, $a = 3$, dan $m = 7$. Sepuluh bilangan acak pertama adalah :

$x_0 = 2 \quad \rightarrow x_{0n} = 0.2857$

$$x_1 = (a \times x_0) \bmod m = (3 \times 2) \bmod 7 = 6 \rightarrow x_{1n} = 0.8571$$
$$x_2 = (a \times x_1) \bmod m = (3 \times 6) \bmod 7 = 4 \rightarrow x_{2n} = 0.5714$$
$$x_3 = (a \times x_2) \bmod m = (3 \times 4) \bmod 7 = 5 \rightarrow x_{3n} = 0.7143$$
$$x_4 = (a \times x_3) \bmod m = (3 \times 5) \bmod 7 = 1 \rightarrow x_{4n} = 0.1429$$
$$x_5 = (a \times x_4) \bmod m = (3 \times 1) \bmod 7 = 3 \rightarrow x_{5n} = 0.4286$$
$$x_6 = (a \times x_5) \bmod m = (3 \times 3) \bmod 7 = 2 \rightarrow x_{6n} = 0.2857 = x_{0n}$$
$$x_7 = (a \times x_6) \bmod m = (3 \times 2) \bmod 7 = 6 \rightarrow x_{7n} = 0.8571 = x_{1n}$$
$$x_8 = (a \times x_7) \bmod m = (3 \times 6) \bmod 7 = 4 \rightarrow x_{8n} = 0.5714 = x_{2n}$$
$$x_9 = (a \times x_8) \bmod m = (3 \times 4) \bmod 7 = 5 \rightarrow x_{9n} = 0.7143 = x_{3n}$$

Formula (3.1) dengan nilai-nilai parameter dan benih seperti pada contoh 3.1. hanya menghasilkan 6 angka acak berbeda. Jelas hal ini tidak baik sehingga nilai parameternya (m dan a) harus diganti. Untuk komputer 32 bit, pilihan $m = 2^{31}-1 = 2147483647$ dan $a = 7^5 = 16807$ nampaknya akan cukup baik.

TUGAS I :

Buat program komputer untuk membangkitkan bilangan acak dengan menggunakan formula (3.1) serta parameter $m = 2^{31}-1$ dan $a = 7^5$. Nilai semua bilangan harus acak terletak pada selang (0,1) dan terdiri dari 4 angka berarti (*significant figure*) atau 4 angka di belakang koma. Bahasa pemrograman yang digunakan bebas. Lebih disukai jika menggunakan Pascal, C, Fortran, atau Matlab. Bangkitkan 100 bilangan acak pertama dalam tabel yang baik dan muat dalam satu halaman. Tugas dikumpulkan pada pertemuan kelas berikutnya. Lampirkan *listing program*-nya. Simpan program ini baik-baik di dalam komputer anda karena sewaktu-waktu akan digunakan lagi.

Formula lain untuk membangkitkan bilangan acak adalah :

$$x_n = (a \cdot x_{n-1} + 1) \bmod m \qquad (3.2)$$

Pembangkitan bilangan acak dengan menggunakan formula (3.2) ini disebut <u>metoda kongruen campuran</u>.

3.3. Estimasi Nilai Integrasi

Jika g(x) adalah sebuah fungsi yang terdefinisi pada selang (0,1) maka nilai integrasi sepanjang selang itu dapat didekati dengan nilai ekspektasi fungsi tersebut, atau

$$\theta = \int_0^1 g(x)dx = E(g(U)) = \frac{\sum_{i=1}^{k} g(U_i)}{k} \qquad (3.3)$$

dimana U_i adalah bilangan acak, i = 1, 2, ..., k. Penurunan persamaan (3.3) diturunkan mengacu kepada kaidah bilangan besar (*law of large number*).

<u>Latihan 3.1.</u>

Turunkan persamaan (3.3).

Algoritma perhitungan integral (3.3) dengan menggunakan bilangan acak adalah sebagai berikut :

Algoritma Integral_1;
Input : k
Output : θ
S = 0
for i = 1 to k do
    U = rand(i)
    S = S + g(U)
end_for
θ = S/k

Jika kita ingin menghitung :

$$\theta = \int_a^b g(x)dx \qquad (3.4)$$

maka kita harus merubah fungsinya sedemikian rupa sehingga batas integralnya menjadi (0,1). Prosedur transformasi dimaksud adalah sebagai berikut :

$$y = (x-a) / (b-a), \text{ sehingga } dy = dx/(b-a) \qquad (3.5)$$

Dengan persamaan ini jika x = a maka y = 0, dan jika x = b maka y = 1. Pernyataan x dalam y adalah : x = a + (b-a)y, sehingga bentuk integral menjadi :

$$\theta = \int_0^1 g(a+(b-a)y)(b-a)dy = \int_0^1 h(y)dy \qquad (3.6)$$

Algoritma perhitungan integral (3.4) adalah sebagai berikut :

Algoritma Integral_2;
Input : k
Output : θ
S = 0
for i = 1 to k do
U = rand(i)
S = S + h(U)
end_for
θ = S/k

Perhatikan bahwa dalam algoritma integral_2 fungsi yang digunakan adalah h(y) = g(a+(b-a)y)(b-a)

Contoh 3.2.

Hitunglah : $\theta = \int_1^5 x^2\, dx$

Jawab :

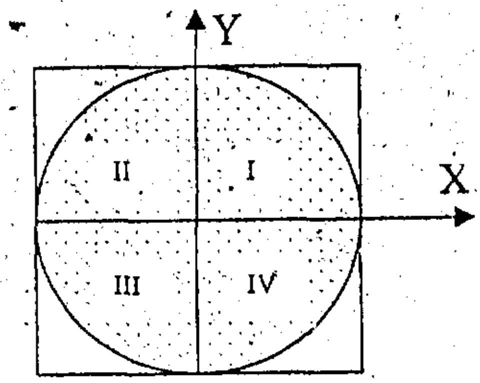
$y = (x-1)/(5-1) = (x-1)/4 \rightarrow dy = dx/4$

$x = 4y + 1,\ dx = 4\ dy$

$$\theta = \int_0^1 (4y+1)^2(4dy) = \int_0^1 4(4y+1)^2 dy,\ \ h(y) = 4(4y+1)^2$$

3.4. Estimasi Nilai π

Luas lingkaran $L = \pi r^2$. Jika $r = 1$ maka $L_1 = \pi$. Sebuah lingkaran dengan jari-jari 1 terletak di dalam bujur sangkar dengan sisi 1 dan luas $L_2 = 4$ seperti gambar berikut :



Jika kita bangkitkan pasangan bilangan acak (X, Y), maka semua pasangan bilangan acak yang memenuhi : $X^2+Y^2 \leq 1$ akan terdapat di dalam seperempat lingkaran, yaitu yang berada di kuadran I, dengan kata lain :

$$P(X^2+Y^2 \leq 1) = L_1 / L_2 = \pi / 4 \qquad (3.7)$$

atau :

$$\pi = 4\, P(X^2+Y^2 \leq 1) \qquad (3.8)$$

Algoritma perhitungan π adalah sebagai berikut :

```
Algoritma Hitung_π;
Input : k
Output : π
C_Ling = 0;
for i = 1 to k do
        X(i) = rand(i);  Y(i) = rand(i+k);
        S(i) = X(i)^2 + Y(i)^2 ;
        if S(i) ≤ 1 then C_Ling = C_Ling+1;
end_for
π = 4 C_Ling / k
```

SIMULASI DAN PEMODELAN
BAB IV PEMBANGKITAN VARIABEL ACAK DISKRIT

Oleh : Asep Juarna, SSi, MKom

4.1. Metoda Transformasi Terbalik (*Invers Transform*)

4.1.1. Variabel Acak Kontinu

Misalkan X adalah variabel acak kontinu dengan fungsi distribusi F, dan U adalah variabel acak yang terdistribusi seragam pada selang [0,1]. Algoritma berikut membangkitkan sebuah nilai (*random variate*) bagi variabel acak X :

1. Bangkitkan bilangan acak U
2. $X = F^{-1}(U)$ (4.1)

Verifikasi kebenaran algoritma di atas diberikan berikut ini. Misalnya X adalah output algoritma di atas, maka :

$$\begin{aligned} P(X \le x) &= P(F^{-1}(U) \le x) \\ &= P(U \le F(x)) \\ &= F(x) \end{aligned}$$

Karena persamaan (4.1), maka metoda ini dinamakan metoda transformási terbalik (*inversi trasnform method*).

Jika yang diberikan fungsi kerapatan f maka harus dilakukan integrasi untuk memperoleh F.

Contoh 4.1.

Diberikan : $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$

Tentukan algoritma pembangkitan bilangan acak X.

Jawab :

Fungsi distribusi variabel acak di atas adalah hasil integrasi terhadap f, yaitu :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$$